第 3 节 诱导公式（★★）

强化训练

1．（2023・江苏无锡模拟・★）$\tan(-420^\circ)$的值为（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$-\sqrt{3}$　（D）$\sqrt{3}$

答案：C

解析：-420°绝对值较大，可先拆一个-360°出来，把绝对值化小，便于利用特殊角的三角函数值计算，

$\tan(-420^\circ)=\tan(-360^\circ-60^\circ)=\tan(-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$.

2．（2023・陕西一模・★）已知$\sin^2(\pi-\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)$，且$0<|\theta|<\frac{\pi}{2}$，则$\theta$等于（　　）

（A）$-\frac{\pi}{6}$　（B）$-\frac{\pi}{3}$　（C）$\frac{\pi}{6}$　（D）$\frac{\pi}{3}$

答案：D

解析：所给的等式中有π，$\frac{3\pi}{2}$，先用诱导公式化简，

因为$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$，$\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$，所以代入题干的等式可得$\sin^2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$，

解得：$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$或 0，又$0<|\theta|<\frac{\pi}{2}$，所以$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$或$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，故$\sin\theta$只能取$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$\theta=\frac{\pi}{3}$.

3．（2022・四川成都模拟・★★）已知$\tan\theta=2$，则$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=$______.

答案：-2

解析：$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=\frac{\cos\theta-(-\cos\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{2}{1-\tan\theta}=-2$.

4．（2023・湖北十堰模拟・★★）已知角α的终边与单位圆的交点为$P(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，则$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=$（　　）

（A）$\frac{4}{5}$　（B）$-\frac{4}{5}$　（C）$-\frac{3}{5}$　（D）$\frac{3}{5}$

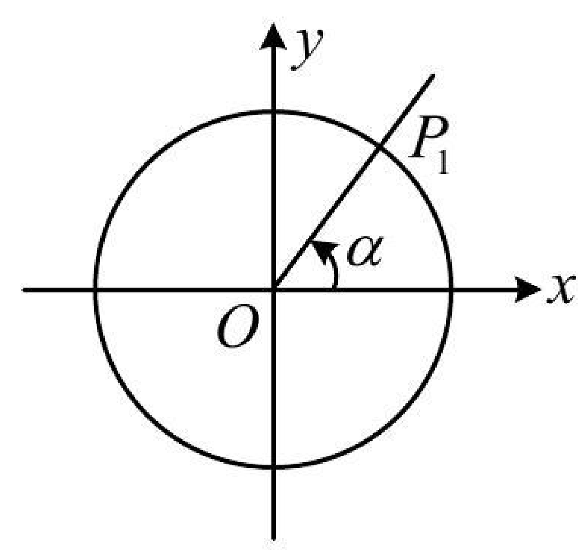
答案：A

解析：给了α的终边与单位圆的交点，可用三角函数定义求α的各三角函数值，故用诱导公式化去目标式中的$\frac{3\pi}{2}$，即可得到结果，

由题意，$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

5．（2023•安徽马鞍山模拟•★★★）如图，在平面直角坐标系内，角α的始边与x轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点$P_1(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，若线段$OP_{n-1}$绕点$O$逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$得到$OP_n(n\ge 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则点$P_{2023}$的纵坐标为（　　）

（A）$-\frac{4}{5}$　（B）$-\frac{3}{5}$　（C）$\frac{3}{5}$　（D）$\frac{4}{5}$



答案：B

解析：先找到以射线OP_{2023}为终边的角，根据三角函数定义，其正弦值即为点P_{2023}的纵坐标，

由题意，α与单位圆的交点为$P_1(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，由三角函数定义，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

设以OP_{2023}为终边的角为β，因为OP_{2023}由OP_1逆时针旋转2022个$\frac{\pi}{4}$后得到，

所以$\sin\beta=\sin(2022\times\frac{\pi}{4}+\alpha)=\sin(504\pi+\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，故点$P_{2023}$的纵坐标为$-\frac{3}{5}$.

6．（2022•四川自贡期末•★★）已知$\sin(\frac{\pi}{5}-x)=\frac{3}{5}$，则$\cos(\frac{7\pi}{10}-x)=$______.

答案：$-\frac{3}{5}$

解析：给值求值问题，先尝试探究角之间的关系，为了便于观察，可将已知的角换元来看，

设$t=\frac{\pi}{5}-x$，则$x=\frac{\pi}{5}-t$，且$\sin t=\frac{3}{5}$，

所以$\cos(\frac{7\pi}{10}-x)=\cos[\frac{7\pi}{10}-(\frac{\pi}{5}-t)]=\cos(\frac{\pi}{2}+t)=-\sin t=-\frac{3}{5}$.

7．（2022•湖南模拟•★★）已知$\cos(\frac{5\pi}{12}+\alpha)=\frac{1}{3}$，且$-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，则$\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=$（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$-\frac{1}{3}$　（D）$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

答案：D

解析：设$t=\frac{5\pi}{12}+\alpha$，则$\alpha=t-\frac{5\pi}{12}$，且$\cos t=\frac{1}{3}$，所以$\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=\cos[\frac{\pi}{12}-(t-\frac{5\pi}{12})]=\cos(\frac{\pi}{2}-t)=\sin t$，

已知$\cos t$求$\sin t$，得研究t的范围，才能确定开平方该取正还是取负，

因为$-\pi<\alpha<-\dfrac{\pi}{2}$，所以$-\dfrac{7\pi}{12}<t=\dfrac{5\pi}{12}+\alpha<-\dfrac{\pi}{12}$，故$\sin t<0$，

所以$\sin t=-\sqrt{1-\cos^2 t}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，故$\cos(\dfrac{\pi}{12}-\alpha)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

8．（2022·山西二模·★★★）若$\sin 10^\circ=a\sin 100^\circ$，则$\sin 20^\circ=$（　　）

（A）$\dfrac{a}{a^2+1}$　（B）$-\dfrac{a}{a^2+1}$　（C）$\dfrac{2a}{a^2+1}$　（D）$-\dfrac{2a}{a^2+1}$

答案：C

解析：注意到求值的角$20^\circ=2\times 10^\circ$，所以将已知等式中的$100^\circ$转换成$10^\circ$，

由题意，$\sin 10^\circ=a\sin 100^\circ=a\sin(90^\circ+10^\circ)=a\cos 10^\circ$，所以$\tan 10^\circ=a$，

故$\sin 20^\circ=2\sin 10^\circ\cos 10^\circ=\dfrac{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ}=\dfrac{2\tan 10^\circ}{\tan^2 10^\circ+1}=\dfrac{2a}{a^2+1}$.

9．（★★★）计算：

（1）$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ=$______；（2）$\dfrac{\lg(\tan 1^\circ)+\lg(\tan 2^\circ)+\cdots+\lg(\tan 89^\circ)}{\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ}=$______.

答案：（1）$\dfrac{89}{2}$；（2）0

解析：（1）$\sin^2 1^\circ$，$\sin^2 2^\circ$等无法直接计算，考虑组合计算，注意到$\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ=\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ=1$，类似的，$\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ=\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ=1$，…，计算的方法就出来了，

记$S=\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ$ ①，

因为$\sin 1^\circ=\sin(90^\circ-89^\circ)=\cos 89^\circ$，$\sin 2^\circ=\sin(90^\circ-88^\circ)=\cos 88^\circ$，…，$\sin 89^\circ=\sin(90^\circ-1^\circ)=\cos 1^\circ$，

代入式①得：$S=\cos^2 89^\circ+\cos^2 88^\circ+\cos^2 87^\circ+\cdots+\cos^2 1^\circ=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 89^\circ$ ②，

所以①+②可得：$2S=(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)+(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)+\cdots+(\sin^2 89^\circ+\cos^2 89^\circ)=89$，故$S=\dfrac{89}{2}$.

（2）先用对数的运算性质将分子合并，$\lg(\tan 1^\circ)+\lg(\tan 2^\circ)+\cdots+\lg(\tan 89^\circ)=\lg(\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdots\tan 89^\circ)$，

因为$\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdots\tan 89^\circ=\dfrac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}\cdot\dfrac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}\cdots\dfrac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ}=\dfrac{\sin 1^\circ}{\sin 89^\circ}\cdot\dfrac{\sin 2^\circ}{\sin 88^\circ}\cdots\dfrac{\sin 89^\circ}{\sin 1^\circ}=1$，

所以$\lg(\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdots\tan 89^\circ)=\lg 1=0$，故原式$=0$.